Morrey 空间的小波表示*

周传喜[1]，宋 亮[2]
（1. 北京理工大学珠海学院，广东 珠海 519085；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：许多常用的函数空间（如 $L^p(\mathbb{R}^n)$）都有小波刻划，但 Morrey 空间 $L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$（$1<p<\infty, 0<\delta<n$）却没有相应的小波刻划。利用多维 Daubechies 小波，给出了 Morrey 空间的一个小波刻划。

关键词：Morrey 空间；Daubechies 小波；小波刻划

中图分类号：O174.1　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**0529-6579（2009）02-0011-04

Wavelet Characterization of Morrey Spaces

ZHOU Chuanxi[1], *SONG Liang*[2]
(1. Zhuhai Campus of Beijing Institute of Technology, Zhuhai 519085, China;
2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Many classical functional spaces (such as $L^p(\mathbb{R}^n)$) can be characterized by wavelet. But Morrey spaces $L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$ ($1<p<\infty$, $0<\delta<n$) have not the corresponding characterization by means of wavelet. In this paper, a wavelet characterization of Morrey spaces is given, by using Daubechies's wavelet.

Key words: Morrey spaces; Daubechies's wavelet; characterization of wavelet

Morrey 空间是 1938 年由 C. B. Morrey[1] 在研究拟线性偏微分方程解时引进的. 称一个 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积的实值函数 f 属于 Morrey 空间 $L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$，其中 $1\leqslant p<\infty$，$\delta\in(0,n+p)$，若对任意 $\mathbb{R}^n$ 中的开球 B，存在只依赖于 f 的常数 $C=C(f)$，使得

$$\sup_{B\subset\mathbb{R}^n} r_B^{-\delta}\int_B |f(x)-f_B|^p\mathrm{d}x\leqslant C \tag{1}$$

成立，其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y$。

注意到，当 $\delta=n$ 时，$L^{p,\delta}$ 为 BMO（有界平均振动）空间。这时由 John-Nirenberg 不等式知[2]，对任意的 $p\in[1,+\infty)$，$L^{p,n}$ 空间都表示同一空间。当 $\lambda\in(n,n+p)$ 时，$L^{p,\delta}$ 为 Morrey-Companato 空间，即齐次 Lipschitz 空间 $\Lambda_{\frac{\lambda-n}{p}}(\mathbb{R}^n)$。多年来，Morrey 空间被数学家们广泛地研究[3-9]。

本文研究的 Morrey 空间特指，$0<\delta<n$，$1<p<\infty$ 的情形。

众所周知，L^p 空间，BMO 空间，Morrey-Companato 空间都可以用小波来刻划[10-11]，而对于 Morrey 空间 $L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$，就我们所知而言，一直缺少相对应的小波刻划。

2007 年，Duong 等在文献［12］中给出了 Morrey 空间的 Littlewood-Paley 刻划，这是一个突破，具体叙述为

定理 1　设 $1<p<\infty$，$0<\delta<n$，且 $f\in M_{\sqrt{\Delta},P}$，这里

$$M_{\sqrt{\Delta},P}=\{f\in L^P_{loc}(\mathbb{R}^n):|f(x)|^P(1+|x|^{n+1})^{-1}\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

则下列条件等价：

* 收稿日期：2008-09-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10571182）；中山大学青年教师科研启动基金资助项目（37）；教育部博士点新教师基金
作者简介：周传喜（1982 年生），男，助教；通讯作者：宋亮；E-mail：wahh0524@163.com

(i) $f \in L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$

(ii) $I(f,p) = \sup\limits_{B \subset \mathbb{R}^n} r_B^{-\frac{\delta}{p}} \left\| \left\{ \int_0^B \left| t \frac{\partial}{\partial t} P_t * f(x) \right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\| < \infty$

Littlewood-Paley 刻划向来与小波刻划有着密切的联系。在文献［12］的启发下，我们给出了 Morrey 空间的小波刻划。下面是本文的主要结果：

定理 2 设 $1 < p < \infty$，$0 < \delta < n$，且 $f \in M_{\sqrt{\Delta},P}$，则以下条件等价：

(A) $f \in L^{p,\delta}(\mathbb{R}^n)$

(B) $\sup\limits_{B \subset \mathbb{R}^n} r_B^{-\delta} \left(\int \left(\sum\limits_{Q(\lambda) \subset B} |\alpha(\lambda)|^2 2^{jn} \chi_{Q(\lambda)}(x) \right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

其中 $\alpha(\lambda) = \langle f, \psi_\lambda \rangle$，$\lambda = 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon$，$j \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}^n$，$\varepsilon \in E$，$E$ 是集合 $\{0,1\}^n$ 除去 $(0,0,\cdots,0)$，ψ_λ 为下一节中介绍的 n 维紧支集的 r 正则的 Daubechies 小波，$r \geqslant 1$。$Q(\lambda)$ 表示由 $2^j x - k \in [0,1)^n$ 定义的二进方体，$\chi_{Q(\lambda)}(x)$ 是 $Q(\lambda)$ 上的特征函数，B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意球，r_B 表示球 B 的半径。

1 基本结果

定义 1[10-11] 设 r 为正整数。如果一个函数 $\psi(x)$ 满足以下四个性质，则称它是一个 r 正则的 Daubechies 小波（基）。这些性质是：

(a) $\psi(x)$ 及它的直到 r 阶导数都属于 $L^\infty(\mathbb{R})$；

(b) $\psi(x)$ 具有紧支集。精确的说，存在常数 $m \geqslant 1$，使得对任意 r，$\psi(x)$ 的支集包含于 $[-mr, mr]$ 中；

(c) 对 $0 \leqslant i \leqslant r$，有 $\int_{-\infty}^{\infty} x^i \psi(x) \mathrm{d}x = 0$；

(d) 函数 $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ $(j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z})$ 的集合构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基。

多维紧支集小波的构造[10]：

定义指标集 $\Lambda = \{\lambda := 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon \in E\}$，其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集，E 表示 $2^n - 1$ 个序列 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$ 的集合，其中 ε_i 取 0 或 1，但序列 $(0,0,\cdots 0) \notin E$。对任意的 $\lambda = 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon$，定义 n 维紧支集小波 ψ_λ 如下：

$$\psi_\lambda(x) = 2^{jn/2} \psi^{\varepsilon_1}(2^j x_1 - k_1) \cdots \psi^{\varepsilon_n}(2^j x_n - k_n)$$

这里，我们约定 $\psi^0 = \varphi$，$\psi^1 = \psi$，φ, ψ 分别为 r 正则的 Daubechies 小波的父小波和母小波。用 $Q(\lambda)$ 表示由 $2^j x - k \in [0,1)^n$ 定义的二进方体。这样，由 φ, ψ 的紧支集条件就知，n 维小波 ψ_λ 的支集包含在方体 $mQ(\lambda)$ 中，$mQ(\lambda)$ 是与 $Q(\lambda)$ 同中心的方体，但边长是 $Q(\lambda)$ 的 m 倍。

引理 1[10] $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的小波刻划。在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中（$1 < p < +\infty$），下面两个模是等价的。

(i) $\|f\|_p$

(ii) $\left\| \left(\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, \psi_\lambda \rangle|^2 |Q(\lambda)|^{-1} \chi_{Q(\lambda)} \right)^{1/2} \right\|_p$

其中 ψ_λ 是上文介绍的 n 维紧支集小波，记号 $Q(\lambda)$，$\chi_{Q(\lambda)}(x)$ 同上。

关于 Morrey 空间 $L^{p,\delta}$ 的前对偶空间有如下的定理。

引理 2[8] $L^{p,\delta} = (H^{q,\delta})^*$，这里 $1 < p < +\infty$，$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$，其中 $H^{q,\lambda}$ 是由所有原子 $H^{q,\lambda}$ 线性组合构成的空间，对任意的 $a(x) \in H^{q,\lambda}$ 原子，即 $a(x)$ 满足：

(i) $\operatorname{supp} a(x) \subset B$；(ii) $\|a\|_q \leqslant C r_B^{-\lambda/p}$；

(iii) $\int a(x) \mathrm{d}x = 0$。

2 定理 2 的证明

(A) ⇒ (B) 的证明。假设 $f \in L^{p,\delta}$，则存在常数 C，对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$

$$r_B^{-\delta} \int_B |f(x) - f_B|^p \mathrm{d}x \leqslant C \tag{2}$$

注意到 $\int \psi_\lambda(x) \mathrm{d}x = 0$ 以及 $\operatorname{supp}\psi_\lambda \subset mQ_\lambda$，从而有

$$\left\| \left(\sum_{Q(\lambda) \subset B} | < f, \psi_\lambda > |^2 2^{jn} \chi_{Q(\lambda)}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

$$= \left\| \left(\sum_{Q(\lambda) \subset B} | < (f - f_{mB}) \chi_{mB}, \psi_\lambda > |^2 2^{jn} \chi_{Q(\lambda)}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

$$\leqslant C \| (f - f_{mB}) \chi_{mB} \|_p \tag{3}$$

$$\leqslant C (m r_B)^{-\delta} \tag{4}$$

这里（3）式利用了 L^p 函数的小波表示（引理 1），而（4）式是不等式（2）的直接应用。这样，我们就得到

$$\sup_B r_B^{-\delta} \left(\int \left(\sum_{Q(\lambda) \subset B} | < f, \psi_\lambda > |^2 2^{jn} \chi_{Q(\lambda)}(x) \right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < C(\delta, m)$$

不等式（B）因此得证。

(B) ⇒ (A) 的证明。假设不等式（B）成立，往证 $f \in L^{p,\delta}$。

根据引理 2，我们只需证明，满足不等式（B）的函数 f 可以作为 $H^{q,\delta}$ 空间的线性连续泛函，这里 q 满足 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$。进一步，只需证明，存在常数 $C > 0$，对任意的支集在球 B 上的 $H^{q,\delta}$ 原子 a，都有：

$$\left| \int f(x) a(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant C \tag{5}$$

由于 $f \in M_{\sqrt{\Delta},P}$，故 f 为局部 L^p 函数，再由 L^p 函数的小波表示（引理 1）知

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} < f,\psi_\lambda > \psi_\lambda(x), \quad \forall x \in B$$

故 $< f ,a > = \sum_{\lambda \in \Lambda}\alpha(\lambda) < \psi_\lambda ,a > =$

$$\int \sum_{\lambda \in \Lambda}\alpha(\lambda) < \psi_\lambda ,a > 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y)\mathrm{d}y =$$

$$\int \sum_{Q(\lambda)\subset 4B}\alpha(\lambda) < \psi_\lambda ,a > 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y)\mathrm{d}y +$$

$$\int \sum_{Q(\lambda)\cap(4B)^c\neq\emptyset}\alpha(\lambda)< \psi_\lambda ,a > 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y)\mathrm{d}y =: \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

下面分别对 Ⅰ，Ⅱ进行估计。

先考虑 I 项。根据 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|\alpha(\lambda)||< \psi_\lambda ,a >|2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y) \leqslant$$
$$(\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|\alpha(\lambda)|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2} \cdot$$
$$(\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|< \psi_\lambda ,a >|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}$$

由引理 1 知

$$\left\|(\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|< \psi_\lambda ,a >|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_q \leqslant$$
$$\left\|(\sum_{\lambda \in \Lambda}|< \psi_\lambda ,a >|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_q \leqslant C\|a\|_q$$

故我们对 I 项运用 Hölder 不等式可得

$$|I|\leqslant \left\|(\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|\alpha(\lambda)|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_p \cdot$$
$$\left\|(\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|< \psi_\lambda ,a >|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_q \leqslant$$
$$C\left\|(\sum_{Q(\lambda)\subset 4B}|\alpha(\lambda)|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_p \cdot \|a\|_q$$

再根据 $H^{q,\delta}$ 原子的条件以及（B）式，我们得

$$|I|\leqslant Cr_B^{\delta/p}\cdot r_B^{-\delta/p} \leqslant C \qquad (6)$$

接下来，我们估计 II 式。

为了使得 $< \psi_\lambda ,a > \neq 0$，必须有 $mQ(\lambda) \cap B \neq \emptyset$。又因为 $Q(\lambda) \cap (4B)^c \neq \emptyset$，故方体 $Q(\lambda)$ 的对角线必定大于 $2r_B/m$。从而我们做更进一步地分解。

$$\sum_{Q(\lambda)\cap(4B)^c\neq\emptyset}|\alpha(\lambda)||< \psi_\lambda ,a >|2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y) \leqslant$$
$$\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}\sum_{k,\varepsilon}|\alpha(\lambda)||< \psi_\lambda ,a>|2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y) \qquad (7)$$

对任意的自然数 l，条件 $2^{-j}m\sqrt{n} \in [2^l r_B ,2^{l+1}r_B)$ 以及 $mQ(\lambda) \cap B \neq \emptyset$ 可以推知，$Q(\lambda) \subset 2^{l+2}B$。再次运用 Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式以及条件（B），我们得到如下估计

$$\int \sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}\sum_{k,\varepsilon}|\alpha(\lambda)||< \psi_\lambda ,a>|2^{jn}\chi_{Q(\lambda)} \cdot$$
$$(y)\mathrm{d}y \leqslant \left\|(\sum_{Q(\lambda)\subset 2^{l+2}B}|\alpha(\lambda)|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_p \cdot$$
$$\left\|(\sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}\sum_{k,\varepsilon}|< \psi_\lambda ,a >|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_q \leqslant$$
$$C(2^{l+2}r_B)^{\delta/p}\left\|(\sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}\sum_{k,\varepsilon}|< \psi_\lambda ,a >|^2 \cdot$$
$$2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2}\right\|_q \qquad (8)$$

根据小波 ψ_λ 的定义，容易计算得

$$|< \psi_\lambda ,a >|\leqslant 2^{jn/2}\|a\|_1 \leqslant 2^{jn/2}\|a\|_q|B|^{1/p}$$

注意到，当 l,j 取定时，k,ε 的个数不超过固定常数 M（可取 $M = mn^{n/2} + 2^n$），从而

$$(\sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}\sum_{k,\varepsilon}|< \psi_\lambda ,a >|^2 2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y))^{1/2} \leqslant$$
$$M\|a\|_q|B|^{1/p}(\sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}2^{2jn}\chi_{2^{l+2}B}(y))^{1/2} \leqslant$$
$$M\|a\|_q|B|^{1/p}(\sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}2^{2jn})^{1/2}\chi_{2^{l+2}B}(y) \leqslant$$
$$CM\|a\|_q|B|^{1/p}(2^l r_B)^{-n}\chi_{2^{l+2}B}(y) \qquad (9)$$

将估计（9）式代人（8）式中，可得

$$\int \sum_{2^{-j}m\sqrt{n}\in[2^l r_B,2^{l+1}r_B)}\sum_{k,\varepsilon}|\alpha(\lambda)||<\psi_\lambda ,a>|2^{jn}\chi_{Q(\lambda)}(y)\mathrm{d}y \leqslant$$
$$CM(2^{l+2}r_B)^{\delta/p}\|a\|_q|B|^{1/p}(2^l r_B)^{-n}|2^{l+2}B|^{1/q} \leqslant$$
$$C'2^{l(\delta-n)/p} \qquad (10)$$

结合式子（7）和（10），并应用 $0 < \delta < n$ 得

$$|II|\leqslant C\sum_{l=1}^{+\infty}2^{l(\delta-n)/p} \leqslant C' \qquad (11)$$

这样，（6）式和（11）式直接推出了（5）式。

由此我们便从（B）得到了（A），因而完成了定理 2 的证明。

参考文献：

[1] MORREY C B. On the solution of variations and related topics[J]. Proc Amer Math Soc,1943, 1: 1 – 130.

[2] JOHN F, NIRENBERG L, On functions of bounded mean oscillation[J]. Comm Pure Appl Math,1961, 14: 415 – 426.

[3] CAMPANATO S. Proprieta di una famiglia di spazi funzionali[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1964, 18(3): 137 – 160.

[4] JANSON S, TAIBLESON M H, WEISS G. Elementary characterizations of the Morrey-Campanato spaces[J]. Lecture Notes in Math,1983, 992: 101 – 114.

[5] PEETRE J. On the theory of $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$ spaces[J]. J Funct Anal,1969, 4:71 – 87.

[6] SPANNE S. Some function spaces defined by using the mean oscillation over cubes[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci,1965, 19(4): 593 – 608.

[7] STAMPACCHIA G. $\mathfrak{L}^{(p,\lambda)}$ spaces and interpolation[J]. Comm Pure Appl Math,1964, 17:293 – 306.

（下转第 19 页）

提升；

（3）智能遗传算法建立在正交实验的基础上，具备优良的特性。利用智能遗传算法优选拉普拉斯分类器核参数非常成功，是一种有效的核参数选择方法。

参考文献：

[1] PIERRE B, SOREN B. Bioinformatics: The machine learning approach[M]. 2nd ed. USA: arrangement with MIT through Arts & Licensing International, Inc, 2001.

[2] WEBB A R. Statistical pattern recognition[M]. John wiley and sons, LTD, 2002.

[3] 杨淑莹. 模式识别与智能计算—Matlab 技术实现[M]. 北京：电子工业出版社, 2008.

[4] PARZEN E, On the estimation of a probability density function and the mode[J]. Annal Math Stat, 1962, 32: 1065 - 1076.

[5] MIKA S, RATSCH G, WESTON J, et al. Fisher discriminant analysis with kernels[C] // Proc IEEE Workshop Neural Netw. Signal Process. Madison, WI, 1999: 41 - 48.

[6] YANG J, FRANGI A F, YANG J Y, et al. KPCA plus LDA: a complete kernel Fisher discriminant framework for feature extraction and recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(2): 230 - 244.

[7] NELLO C, JOHN S T. An Introduction to support vector machines and other Kernel-based learning methods[M]. China Machine Press, 2005.

[8] VAPNIK V N. Statistical learning theory[M]. New York: Wiley, 1998.

[9] VAPNIK V N. The Nature of Statistical Learning Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[10] JENSSEN R, ERDOGMUS D. et al. The laplacian classifier[J]. IEEE Trandsactions on Signal Processing. 2007, 55(7): 3262 - 3271.

[11] MIKA S, RATSCH G, WESTON J, et al. Fisher discriminant analysis with kernels[C] // Proc IEEE Workshop Neural Netw Signal Process, 1999: 41 - 48.

[12] WILLIAMS C K, BARBER D. Bayesian classification with Gaussian processes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(12): 1342 - 1351.

[13] JENSSEN R, ERDOGMUS D, PRINCIPE J C, et al. The Laplacian PDF distance: A cost function for clustering in a kernel feature space[C] // Proc Adv Neural Inf Process Syst, 2005: 625 - 632.

[14] HO S Y, SHU L S, CHEN J H. Intelligent evolutionary algorithms for parameter optimization problems[J]. IEEE Trans, Evolutionary Comput, 2004, 8(6): 522 - 541.

[15] MURPHY R, ADA D. UCI repository of machine learning Databases[J]. Tech Rep Dept Comput Sci, Univ California, Irvine, 1994.

[16] RAETSCH G, ONODA T, MÜLLER K R. Soft margins for adaboost[J]. Mach Learn, 2001, 42: 287 - 320.

[17] CHANG C C, LIN C J. LIBSVM: a library for support vector machines[EB/OL]. 2001, software available at: http://www.csie.ntu.edu.tw/ >> cjlin/libsvm.

（上接第 13 页）

[8] ZORKO C T. Morrey space [J]. Proc Amer Math Soc, 1986, 98: 586 - 592.

[9] WU Z J, XIE C P. Q spaces and Morrey spaces [J]. J Funct Anal, 2003, 201: 282 - 297.

[10] MEYER Y, COIFMANN R. Wavelets Calderon-Zygmund and multilinear operators [M]. Translated by David Salinger, Cambridge University Press, 1997.

[11] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets [M]. SIAM, Philadelphia, 1992.

[12] DUONG X T, XIAO J, YAN L X. Old and new Morrey space with heat kernel bounds [J]. J Four Anal Appl, 2007, 13 (1): 87 - 111.